Exercice 6

Dans chaque cas, donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point $A(1;-2;3)$ et parallèle à la droite *d*.

1) *d* est l'axe des ordonnées.
2) *d* passe par l'origine du repère et le point $B(-1;2;-3)$.
3) *d* a comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2020 \\ y = t - 2021 \\ z = -2t + 2022 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) vecteurs directeurs d: $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc, $\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2+t \\ z = 3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

2) vecteur directeur de (OB) : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

donc, $\Delta : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

3) vecteur directeur de d : $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc, $\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Exercice 7

On considère les droites *d* et *d'* définies par leur représentation paramétrique respective :

$$d : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = -4 - 2s \\ z = 3 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que les droites *d* et *d'* ne sont pas parallèles.
2) Montrer que ces droites sont sécantes.
3) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

1) vecteur directeur de d : $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

vecteur directeur de d' : $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$d \parallel d' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{n_1} = k \cdot \vec{n_2}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \left| \begin{cases} -2 = k \cdot 1 & ① \\ 1 = k \cdot (-2) & ② \\ -1 = k \cdot 3 & ③ \end{cases} \right.$

① $\Leftrightarrow k = -2$

Dans ② : $1 \neq -2 \cdot (-2) = -4$ impossible ↯

Donc $d \nparallel d'$

2) Comme $d \nparallel d$, ils sont sécantes.

d et d' sont sécantes $\Leftrightarrow \exists (t;s) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{cases} 3-2t = -1+s & ① \\ -3+t = -4-2s & ② \\ -t = 3+3s & ③ \end{cases} \right.$

③ $\Leftrightarrow t = -3s-3$ ④

Dans ② : $-3-3s-3 = -4-2s$

$\Leftrightarrow s = -2$

Dans ④ : $t = -3 \cdot (-2) - 3$

$= 3$

Vérifions dans ①: $3-2\cdot3=-3$ et $-1+(-2)=-3$

Donc d et d' sont sécantes

3) Pour $t=3$: $d: \begin{cases} x = 3-2\cdot3 \\ y = -3+3 \\ z = -3 \end{cases} = \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=-3 \end{cases}$

Donc $d \cap d' = \{(-3;0;-3)\}$

Exercice 8

On considère les droites *d* et *d'* définies par leur représentation paramétrique respective :

$$d : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = -4 - 2s \\ z = 3 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1) Est-ce que les droites *d* et *d'* sont parallèles ? Justifier.
2) Montrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

1) vecteurs directeurs de d : $\vec{n_1}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

vecteurs directeurs de d' : $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$d \parallel d' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{n_1} = k\cdot\vec{n_2}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} -5 = k\cdot1 & ① \\ 1 = k\cdot(-2) & ② \\ -1 = k\cdot3 & ③ \end{cases}$

① $\Leftrightarrow k=-5$

Dans ③ : $-1 \neq -5\cdot3 = -15$ impossible ↯

Donc $d \not\parallel d'$

2) droites coplanaires ?

$$\begin{cases} 2-5t = -1+s & ① \\ -3-t = -4-2s & ② \\ -1-t = 3+3s & ③ \end{cases}$$

$① \Leftrightarrow s = -5t+3$

Dans ②: $-3-t = -4-2(-5t+3)$

$\Leftrightarrow -3-t = -4+10t-6$

$\Leftrightarrow 7 = 11t$

$\Leftrightarrow t = \frac{7}{11}$

Dans ③: $-1-\frac{7}{11} \stackrel{?}{=} 3+3\cdot\left(-5\cdot\frac{7}{11}+3\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{18}{11} \neq \frac{27}{11}$

Donc les droites ne sont pas coplanaires

Exercice 9

On considère les droites *d* et *d'* définies par leur représentation paramétrique respective :

$$d : \begin{cases} x = -3t \\ y = -7+2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 5+5s \\ y = -1+s \\ z = 1+3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1) Est-ce que les droites *d* et *d'* sont parallèles ? Justifier.
2) Etudier la position relative des droites *d* et *d'*.

1) vecteur directeur de d : $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$

vecteur directeur de d' : $\vec{n_2}\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$

$d \parallel d' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{n_1} = k\cdot\vec{n_2}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} -3 = k\cdot 5 & ① \\ 2 = k\cdot 1 & ② \\ -1 = k\cdot 3 & ③ \end{cases}$$

$② \Leftrightarrow k=2$

Dans ③ : $-1 \neq 2 \cdot 3$

Donc $d \not\parallel d'$.

2) <u>coplanaires ?</u>

$$d : \begin{cases} -3t = 5+5s & ① \\ -7+2t = -1+s & ② \\ -t = 1+3s & ③ \end{cases}$$

$③ \Leftrightarrow t = -3s-1$

Dans ① $-3(-3s-1) = 5+5s \Leftrightarrow 9s+3 = 5+5s$

$\Leftrightarrow 4s = 2$

$\Leftrightarrow s = \frac{1}{2}$

Dans ② : $-7+2\left(-3\cdot\frac{1}{2}-1\right) \overset{?}{=} -1+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -12 \neq -\frac{1}{2}$

Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

<u>Exercice 10</u>

On considère les droites *d* et *d'* définies par leur représentation paramétrique respective :

$$d : \begin{cases} x = 7 - t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 6 + 2s \\ y = -3 - 4s \\ z = 6s \end{cases} , s \in \mathbb{R}$$

Etudier la position relative des droites *d* et *d'*.

vecteur directeur de d : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

vecteur directeur de d' : $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$d // d' \iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} -1 = 2 \cdot k \\ 2 = -4 \cdot k \\ -3 = 6 \cdot k \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Donc $d // d'$

d et d' confondues ?

$$A(7 ; -5 ; 3) \in d$$

$$A \in d' \iff \exists s \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 7 = 6 + 2s \\ -5 = -3 - 4s \\ 3 = 6s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2s \\ -2 = -4s \\ \frac{1}{2} = s \end{cases} \iff \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ s = \frac{1}{2} \\ s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $A \in d'$ et d et d' sont confondues.

Exercice 11

On considère les droites *d* et *d'* définies par leur représentation paramétrique respective :

$$d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = -9 + 4s \\ z = 7 + 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Etudier la position relative des droites *d* et *d'*.

vecteur directeur de d : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

vecteur directeur de d' : $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$

- $d // d' \iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Donc : $d // d'$

- Confondues ?

On a : $A(4;-3;0) \in d$

$$A \in d' \iff \exists s \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 4 = 3 - 2s & (1) \\ -3 = -9 + 4s & (2) \\ 0 = 7 + 6s & (3) \end{cases}$$

(3) : $s = -\frac{7}{6}$

Dans (1) : $3 - 2\left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{16}{3} \neq 4$

Donc $A \notin d'$ et d et d' sont strictement parallèles.

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, étudier si les droites *d* et *d'* sont coplanaires :

1) $d : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = -t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -2 - s \\ z = -5 + 3s \end{cases} , s \in \mathbb{R}$

2) $d : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = -t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x = 3 + 4s \\ y = -2 - 2s \\ z = -5 + 2s \end{cases} , s \in \mathbb{R}$

1) d et d' sont sécantes

$$\Leftrightarrow \exists (t;s) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} 3-2t = 3+s & ① \\ -3+t = -2-s & ② \\ -t = -5+3s & ③ \end{cases}$$

③ : $t = 5-3s$

Dans ② : $-3+5-3s = -2-s$

$\Leftrightarrow s = 2$

Dans ③ : $t = 5-3\cdot 2 = -1$

Verifions dans ① : $\left. \begin{array}{l} 3-2\cdot(-1) = 5 \\ 3+2 = 5 \end{array} \right) =$

Donc d et d' sont sécantes.

Il suit que d et d' sont coplanaires.

2)

vecteur directeur de d : $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

vecteur directeur de d' : $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d // d' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \vec{u} = k\cdot\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} -2 = k\cdot 4 \\ 1 = k\cdot(-2) \\ 1 = k\cdot 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Donc d//d' et d et d' sont coplanaires.

Exercice 13

On donne les points $A(0;-3;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(-1;0;1)$ et $D(0;-2;2)$.

Etudier la position relative des droites (AB) et (CD).

On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$(AB) \equiv \begin{cases} x=-t \\ y=4t-3 \\ z=-t+1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ $\quad (CD) \equiv \begin{cases} x=s-1 \\ y=-2s \\ z=s+1 \end{cases}, s\in\mathbb{R}$

$(AB) // (CD) \iff \exists k\in\mathbb{R} \mid \overrightarrow{AB} = k\cdot\overrightarrow{CD}$

$\iff \exists k\in\mathbb{R} \mid \begin{cases} -1=k \\ 4=-2k \\ -1=k \end{cases}$

$\implies \begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \\ k=-1 \end{cases}$ $\lightning$ impossible

Donc $(AB) \not\parallel (CD)$

(AB) et (CD) sont sécantes

$\iff \exists (t,s)\in\mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} -t=s-1 & ① \\ 4t-3=-2s & ② \\ -t+1=s+1 & ③ \end{cases}$

③: $s=-t$

Dans ①: $s=s-1$ $\lightning$ impossible

Donc (AB) et (CD) ne sont pas sécantes et (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

(AB) et (CD) sont orthogonales ?

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1$$
$$= -10 \quad (\neq 0)$$

Donc (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

Exercice 14

On considère la droite *d* passant par le point $A(1;-3;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;4;-2)$ et la droite *d'* passant par $B(2;-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u'}(3;-1;1)$.

Etudier la position relative des droites *d* et *d'*. Si ces droites sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

$$d \equiv \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 4t-3 \\ z = -2t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d' \equiv \begin{cases} x = 3s+2 \\ y = -s-1 \\ z = s+1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

d et d' sont sécantes

$$\Leftrightarrow \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases} 2t+1 = 3s+2 & ① \\ 4t-3 = -s-1 & ② \\ -2t+2 = s+1 & ③ \end{cases}$$

$$①: \; 2t = 3s+1 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}$$

Dans ②: $4\left(\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}\right) - 3 = -s-1$

$$\Leftrightarrow 6s + 2 - 3 = -s - 1$$
$$\Leftrightarrow 7s = 0$$
$$\Leftrightarrow s = 0$$

Dans ①: $t = \frac{1}{2}$

Vérifions dans ③: $\left.\begin{matrix} -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 1 \\ 0 + 1 = 1 \end{matrix}\right\} =$

Donc d et d' sont sécantes.

d et d' orthogonales ?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1$$

$$= 0$$

Donc d et d' sont perpendiculaires.

Point d'intersection : $d \cap d' = \{B(2 ; -1 ; 1)\}$